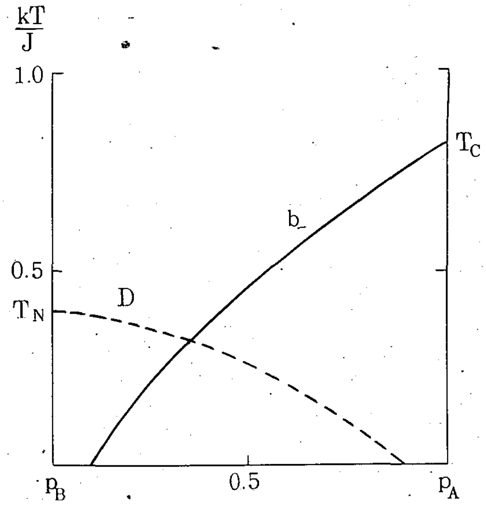
Cayley樹上のHeisenberg模型(「統計力学の数学的問題」,基研研究会報告)

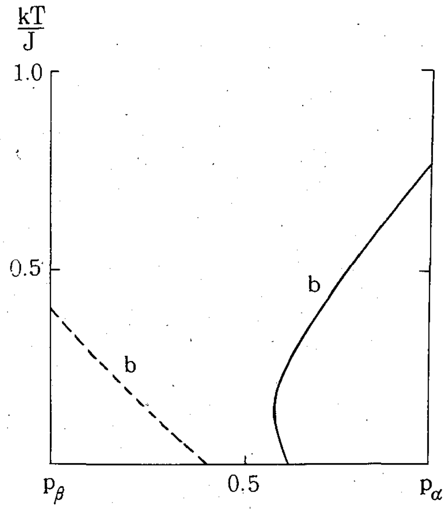
小川, 泰



$J_{AA} = J \quad J_{BB} = -0.5J$

$J_{AB} = 0.5J$

図 1　site モデル



$J_{\alpha} = J \quad J_{\beta} = 0.5J$

図 2　bond モデル

Cayley 樹上の Heisenberg 模型

京大理　小川　泰

一様な系とみなした Cayley 樹は Ising 模型の Bethe近似が厳密な扱いとなる系であることを Kurata−Kikuchi−Watari[1] が指摘して以来 Bethe 格子と呼ばれている。しかし最近，有限系を考えた上で熱力学極限をとると自発磁化を伴わない帯磁率発散が起ったり，Bethe 近似と一致しないことが Matsuda[2]，Eggarter[3] により独立に指摘された。これは表面効果のせいであり，この系が本質的に一様でないことによっている。Cayley 樹は閉じた道がない構造という意味では一次元的であるが，表面自由度が全自由度に対して占める割合が熱力学極限においても有限であるという点では，むしろ無限次元的である。通常の次元数概念を適用するとこのように低次元性と高次元性が共存している。この系自体は非現実的かも知れないが，いかなる物理的性質にはいかなる

次元性が反映するかをみるのは有意義であり，さまざまな教訓を含んでいるように思う。

ここではある点を中心にして対称に成長したCayley 樹上の強磁性Heisenberg 模型を，系の大きい極限で考察する。勿論基底状態は全スピン最大の強磁性状態だが，スピンを1個逆転させた1 magnon 状態に限って考えると，この系のもつ高度の対称性のために，ハミルトニアンはブロック対角化でき，厳密に固有値問題が解ける。スペクトルは種々の意味で特異的である。その一つは格子振動スペクトルの場合についてRubin－Zwanzig[4]が指摘していることに関係あるが，枝先の有限個の点だけを伝播するモードが熱力学極限においても通常の一次元問題の形のバンドの中に無数に存在することである。

中心点を第0殻としてN殻系の場合に，ハミルトニアンは次の（N+1）×（N+1）行列A

$$
A \equiv \begin{bmatrix}
z & -\sqrt{z} & & & & \\
-\sqrt{z} & z & -\sqrt{z-1} & & & 0 \\
 & -\sqrt{z-1} & z & \ddots & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & \ddots & z & -\sqrt{z-1} \\
 & 0 & & & -\sqrt{z-1} & 1
\end{bmatrix}
$$

と（z−1）ケのN×N行列B_N，z（z−2）$(z-1)^{t-1}$ケの（N−t）×（N−t）行列B_{N-t}（t＝1, 2,⋯, N−1）にブロック対角化され，それら二種類の固有値問題に帰着する。但しM×M 行列B_Mは

$$
B_M = \begin{bmatrix}
z & -\sqrt{z-1} & & & & \\
-\sqrt{z-1} & z & -\sqrt{z\ 1} & & & 0 \\
 & -\sqrt{z-1} & z & \ddots & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & \ddots & z & -\sqrt{z-1} \\
 & 0 & & & -\sqrt{z-1} & 1
\end{bmatrix}
$$

で定義される。

これらの行列の固有ベクトルが，いわば動径関数に相当し，固有関数自体はこの動径

関数に外向減衰の指数関数因子を乗じて得られる。A，B は共に一次元波動方程式の形をしているが，いずれも一ケの「表面局在モード」をもち，その動径関数は内向に指数関数減衰している。これに対応する固有関数は指数関数が相殺してしまって奥まで浸入していることになる。実際行列 A の場合の「表面モード」は各点とも一様な波動関数に対応し，基底状態と縮退した状態である。A，B の波動モードは外向減衰になるわけだが，$N \to \infty$ でも自由度の小さい B 行列が存在し，有限自由度問題が残存する。

エネルギーの低い励起は「表面モード」の方であり，準位

$$E_n = r^n E_0 \qquad (0 < r < 1, \; n = 1, 2, \cdots)$$

が $r^n d_0$ 重縮退という具合に集積する。

magnon を boson とみなして，このスペクトルの場合に無限小温度で励起する magnon 総数を計算すると，二次元系の場合と同様に対数発散になっている。従って強磁性基底状態は不安定で，自発磁化はないということになる。しかし，前述のように系は本質的に一様でないので，波動関数に立入って調べてみると，中心部に存在するマグノンは無限小である。表面を考慮せず初めから無限行無限列の A 及び B の行列のみ考えれば励起スペクトルは $z - 2\sqrt{z-1}\cos k$ という形になって，ギャップ $z - 2\sqrt{z-1}$ が存在することが判る。このことから判断して，この樹の Ising 模型の場合と同じように，中心部には自発磁化[2),3)]が存在しうると考えられる。

参 考 文 献

1) M.Kurata, R.Kikuchi and T.Watari, J.Chem. Phys. 21 (1953), 434.

C.Domb, Adv. Phys. 9 (1960), 149.

2) H.Matsuda, Prog. Theor. Phys. 51 (1974), 1053.

3) T.P.Eggarter, Phys. Rev. B9 (1974), 2989.

4) R.J.Rubin and R.Zwanzig, J.Math Phys. 2 (1961), 861.